

Planche n° 23. Continuité

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

n° 1 : (I)** Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour x réel, on pose $f(x) = d(x, A) = \inf\{|y - x|, y \in A\}$. Montrer que f est Lipschitzienne.

n° 2 : (*I) Soit f continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $[a, b]$. Montrer que f a un point fixe.

n° 3 : (I)** Soit f définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $[0, +\infty[$, continue sur $[0, +\infty[$ telle que $\frac{f(x)}{x}$ a une limite réelle $\ell \in [0, 1[$ quand x tend vers $+\infty$. Montrer que f a un point fixe.

n° 4 : (*)** Soit f croissante de $[a, b]$ dans lui-même. Montrer que f a un point fixe.

n° 5 : (**)** Soit f croissante sur $[a, b]$ telle que $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. Montrer que f est continue sur $[a, b]$.

n° 6 : (*)** Soit f continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que, pour tout réel positif x , on ait $f(x^2) = f(x)$. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}^+$. Trouver un exemple où f n'est pas constante.

n° 7 : (IT)** Soit f continue sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ admettant une limite réelle quand x tend vers $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

n° 8 : (I)** Trouver tous les morphismes continus du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même.

n° 9 : (*)** Soit f périodique et continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

n° 10 : (*)** (Théorème d'homéomorphie) Soit f une application continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est injective si et seulement si f est strictement monotone et que dans ce cas $f(I)$ est un intervalle de même nature que I (ouvert, semi-ouvert, fermé).

n° 11 : (*)** Trouver un exemple de fonction périodique dont le groupe des périodes est dense dans $\mathbb{R}$ mais pas $\mathbb{R}$.

n° 12 : (I)** Soit f de $[0, 1]$ dans lui-même telle que $\forall (x, y) \in ([0, 1])^2, |f(y) - f(x)| \geq |x - y|$. Montrer que $f = \text{Id}$ ou $f = 1 - \text{Id}$.

n° 13 : (*)** Trouver les fonctions bijectives de $[0, 1]$ sur lui-même vérifiant $\forall x \in [0, 1], f(2x - f(x)) = x$.

n° 14 : (I)** Soit f une application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[0, 1]$ et vérifiant $f(0) = f(1)$.

- 1) Soit n un entier naturel non nul et soit $a = \frac{1}{n}$. Montrer que l'équation $f(x + a) = f(x)$ admet au moins une solution.
- 2) Montrer (en fournissant une fonction précise) que, si a est un réel de $]0, 1[$ qui n'est pas de la forme précédente, il est possible que l'équation $f(x + a) = f(x)$ n'ait pas de solution.
- 3) Application. Un cycliste parcourt 20 km en une heure.
 - a) Montrer qu'il existe au moins un intervalle de temps de durée une demi-heure pendant lequel il a parcouru 10 km.
 - b) Montrer qu'il existe au moins un intervalle de temps de durée 3 min pendant lequel il a parcouru 1 km.
 - c) Montrer qu'il n'existe pas nécessairement un intervalle de temps de durée 45 min pendant lequel il a parcouru 15 km.